

Übungsklausur Geometrie 2 (Hausdach) Pflichtteil (ohne Hilfsmittel)

1) Gegeben sind die Gerade $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und die Ebene $E: x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 1$.

- Zeige, dass die Gerade g parallel zur Ebene E verläuft.
- Wie groß ist der Abstand von g zu E ?

2) Die Gerade g verläuft durch die Punkte $A(1 \mid -1 \mid 3)$ und $B(4 \mid -3 \mid 7)$.

- Wie groß ist der Abstand der Geraden g zu Punkt $C(-1 \mid -5 \mid 17)$?
- Liegt der Lotfußpunkt dieses Abstandes zwischen A und B ?
Begründe deine Antwort.

3) Gegeben sind der Punkt $A(1 \mid 1 \mid 3)$ und die Ebene $E: x_1 - x_3 = 4$.

- Welche besondere Lage hat die Ebene E im Koordinatensystem?
- Der Punkt A wird an der Ebene gespiegelt.
Bestimme die Koordinaten des Bildpunktes.

4) Gegeben sind zwei zueinander parallele Ebenen E_1 und E_2 .

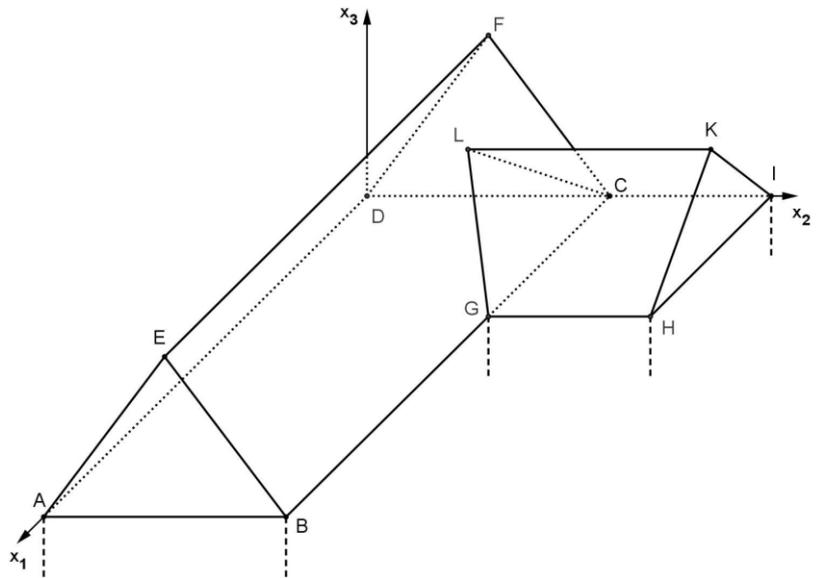
Die Ebene F ist parallel zu E_1 und E_2 und hat von beiden Ebenen den gleichen Abstand.
Beschreibe ein Verfahren, mit dem man eine Gleichung der Ebene F bestimmen kann.

Übungsklausur Geometrie 2 (Hausdach)

Wahlteil (mit WTR und Formelsammlung)

Die Skizze zeigt das Dach eines Gebäudes. In dem gezeichneten Koordinatensystem haben die Punkte A, B, ... , K folgende Koordinaten:

- A(24 | 0 | 0) , B(24 | 9 | 0) ,
 C(0 | 9 | 0) , D(0 | 0 | 0) ,
 E(24 | 4,5 | 6) , F(0 | 4,5 | 6) ,
 G(9 | 9 | 0) , H(9 | 15 | 0) ,
 I(0 | 15 | 0) , K(4,5 | 15 | 4) .



Dabei entspricht eine Längeneinheit einem Meter.

- a) (1) Berechne eine Koordinatengleichung der Ebene E_{Dach} ,
 in der die Punkte B, C, F und E liegen.
 (2) Der zur x_2 – Achse parallel verlaufende Dachfirst des kleineren Dachteils trifft im
 Punkt L auf die Fläche BCFE des Daches.
 Berechne die Koordinaten des Punktes L.
 (3) Berechne den Neigungswinkel der in der Ebene E_{Dach} liegenden Dachfläche zum
 Dachboden ABCD.

(Teilergebnisse: $E_{\text{Dach}} : 4x_2 + 3x_3 = 36$ und $L(4,5 | 6 | 4)$)

- b) Die in der Ebene BCFE liegende Dachfläche soll neu gedeckt werden.
 Berechne den Inhalt dieser Dachfläche.
 Tipp: Berechne zunächst den Flächeninhalt des Dreiecks CLG.
- c) Im Dachraum wächst eine Zimmerpflanze im Punkt $Z(23 | 5,5 | 0)$ senkrecht nach oben.
 Wie hoch darf die Pflanze höchstens werden, wenn sie von der Dachfläche E_{Dach}
 mindestens 1,30 m Abstand haben muss?

Übungsklausur Geometrie 2 (Hausdach)

Lösungen Pflichtteil:

1) a) $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = 2 + 2 - 4 = 0 \Rightarrow g \text{ und } E \text{ sind parallel}$

b) HNF von E: $\frac{x_1 + 2x_2 - 2x_3 - 1}{3} = 0 \Rightarrow d(P;E) = \frac{|1 + 8 + 4 - 1|}{3} = \frac{12}{3} = 4$

2) a) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$

(1) Hilfsebene: $H: 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = b$ durch C: $3 \cdot (-1) - 2 \cdot (-5) + 4 \cdot 17 = b \Leftrightarrow b = 75$

(2) g in H : $3 \cdot (1 + 3t) - 2 \cdot (-1 - 2t) + 4 \cdot (3 + 4t) = 75 \Leftrightarrow 29t = 58 \Leftrightarrow t = 2$

t in g : $L(7 \mid -5 \mid 11)$

(3) $d = |\overrightarrow{LC}| = \left| \begin{pmatrix} -8 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{64 + 36} = 10$

- b) Nein, L liegt nicht zwischen A und B ,
da z.B. die erste Koordinate von L nicht zwischen 1 und 4 liegt.
(oder $t = 2$ und nicht $0 < t < 1$)

3) a) E liegt parallel zur x_2 -Achse

b) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

Schnitt von g und E : $1 + t - (3 - t) - 4 = 0 \Rightarrow t = 3$

$\Rightarrow L(4 \mid 1 \mid 0) \Rightarrow A'(7 \mid 1 \mid -3)$

- 4) (I) F hat denselben Normalenvektor wie E_1 und E_2 .
(II) Wähle je einen beliebigen Punkt auf E_1 und E_2 .
Der Mittelpunkt dieser beiden Punkte liegt auf F .
(III) Stelle die Ebenengleichung von F in Normalenform mit Hilfe
des Normalenvektors und des Punktes M auf.

Übungsklausur Geometrie 2 (Hausdach)

Lösungen Wahlteil:

$$\text{a) (1) } E_{\text{Dach}} : \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ -4,5 \\ 6 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$E_{\text{Dach}} : \vec{n}_{\text{Dach}} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4,5 \\ 6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 4,5 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{n}_{\text{Dach}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$E_{\text{Dach}} : 4x_2 + 3x_3 = b, C \text{ in } E_{\text{Dach}} : 4 \cdot 9 + 3 \cdot 0 = 36 = b \Rightarrow E_{\text{Dach}} : 4x_2 + 3x_3 = 36$$

$$\text{(2) } g_{\text{KL}} : \vec{x} = \begin{pmatrix} 4,5 \\ 15 \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Schnittpunkt mit } E_{\text{Dach}} : 4 \cdot (15 + t) + 3 \cdot 4 = 36 \Leftrightarrow 60 + 4t + 12 = 36 \Leftrightarrow 4t = -36 \Leftrightarrow t = -9$$

$$t = -9 \text{ in } g_{\text{KL}} : L(4,5 \mid 6 \mid 4)$$

$$\text{(3) } E_{\text{Boden}} : x_3 = 0 \Rightarrow \vec{n}_{\text{Boden}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cos \alpha = \frac{|\vec{n}_{\text{Dach}} \cdot \vec{n}_{\text{Boden}}|}{|\vec{n}_{\text{Dach}}| \cdot |\vec{n}_{\text{Boden}}|} = \frac{3}{5} \Rightarrow \alpha = 53,1^\circ$$

b) (1) Fläche Dreieck

(I) Entweder Höhe Dreieck über Abstand Punkt-Gerade und dann Fläche oder

$$\text{(II) Vektorprodukt: } A_{\text{Dreieck}} = \frac{1}{2} \cdot |\overrightarrow{GL} \times \overrightarrow{GC}| = \frac{1}{2} \cdot \left| \begin{pmatrix} -4,5 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -9 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{2} \cdot \left| \begin{pmatrix} 0 \\ -36 \\ -27 \end{pmatrix} \right|$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \sqrt{36^2 + 27^2} = \frac{1}{2} \cdot 45 = 22,5 \text{m}^2$$

(2) Fläche Rechteck

$$A_{\text{Rechteck}} = |\overrightarrow{BE}| \cdot |\overrightarrow{BC}| = \left| \begin{pmatrix} 0 \\ -4,5 \\ 6 \end{pmatrix} \right| \cdot \left| \begin{pmatrix} -24 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right| = 7,5 \cdot 24 = 180 \text{m}^2$$

$$\text{(3) Dachfläche } A_{\text{Dach}} = A_{\text{Rechteck}} - A_{\text{Dreieck}} = 180 \text{m}^2 - 22,5 \text{m}^2 = 157,5 \text{m}^2$$

c) S(23 | 5,5 | h) ist die Spitze der Pflanze in der Höhe h.

Abstand Punkt S zur Ebene $E_{\text{Dach}} = 1,30 \text{m}$:

$$\text{HNF von } E_{\text{Dach}} : \frac{4x_2 + 3x_3 - 36}{5} = 0 \Rightarrow d = \frac{|4 \cdot 5,5 + 3h - 36|}{5} = 1,3$$

$$\text{(I) } \frac{4 \cdot 5,5 + 3h_1 - 36}{5} = 1,3 \Leftrightarrow \left(h_1 = \frac{41}{6} \approx 6,83 \right) \quad \text{(II) } \frac{4 \cdot 5,5 + 3h_2 - 36}{5} = -1,3 \Leftrightarrow h_2 = 2,5$$

Für h_1 liegt S nicht im Dachraum, deshalb lautet S (23 | 5,5 | 2,5),

der Tank darf also höchstens $2,5 \text{m}$ hoch werden.